АНАЛИЗ НА РАЗМЕРНОСТИТЕ - НЕОБХОДИМО УСЛОВИЕ ЗА ПРИЛАГАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ

гл. ас. д-р Георги Гачев

Институт по математика и информатика – Българска академия на науките (България)

Резюме. Статията представя анализа на размерностите като необходимо условие за правилното прилагане на математически модели в практиката. Описани са основните правила за работа с размерности, като всяко правило е пояснено с пример. Материалът е подходящ, както за средното училище, така и за конкретни предмети в професионалното образование.

Ключови думи: величина, мерна единица, еталон, анализ на размерностите, STEM, математически модел

1. Увод

Съобразно стратегическата рамка за развитие на образованието в България „Акцентът при обучението ще бъде изместен от възпроизвеждане на готови знания към развитие на съвременни умения и практическа приложимост на изучаваното учебно съдържание“ (МОН 2021). Следователно умението да се прилагат на практика математическите знания е част от насоките за бъдещо развитие на образованието в страната.

Според таксономията на образователните цели на Блум, “прилагането” е умение, което се нарежда след „знанието“ и „разбирането“ (Bloom et al.1956). Освен това редът в таксономията е такъв, че всяка следваща образователна цел включва уменията от всички предходни. Прилагането на практика на математическите умения се извършва, чрез математически модели. Математическият модел е описание на съществени свойства на реален обект с помощта на формален математически език. Ако приемем гледната точка на Блум, това означава, че за прилагането на конкретно математическо умение е необходимо да се познават и разбират, както формалния апарат на математическия модел, така и свойствата на реалния обект, който той описва. С това необходимите условия за прилагане или съставяне на математически модел далеч не се изчерпват. Желателно е математическият модел да бъде още (Звонарев, 2019):

- Адекватен
- Точен
- Предсказуем
- Прост
- Да може да се усъвършенства

Списъкът не е изчерпателен и може да бъде допълван или редуциран в зависимост от конкретна приложна задача, както и с на натрупване на изследователски опит. Съблюдаването на тези условия на практика отъждествяват свойствата на реалния обект с тези на математическия модел. Това преди всичко означава, че дефинираните връзки между величините в модела трябва да съответстват на измеримите физични свойства на обекта. За да се изследва това съответствие се прилага анализът на размерностите. Анализът на размерностите е метод, чрез който се определят измеримите свойства на явление при положение, че съществува математическа зависимост, която описва явлението (Langhaar, 1951).

Прилагането на математически модел без да се съгласуват размерностите на величините със значителна вероятност води до получаване на неадекватни резултати.

По долу са разгледани важни свойства на размерностите, на които следва да се обърне внимание при:

- практическо прилагане на математически модели
- планиране на експеримент
- измерване, отчитане и записване на значенията на физични величини

Размерностите и техните свойства могат да бъдат включвани в учебното съдържание в подходящ момент, който следва да бъде определен от преподавателя. Това могат да бъдат часовете по общата или професионалната подготовка по физика, астрономия, математика или специални предмети. Особено подходящо би било това да става в рамките на изследователския подход в обучението, както и във все по-разширяващото се прилагане на STEM в образователната система.

2. Основни мерни единици

Първоначално Максуел е дефинирал три „фундаментални мерни единици". Това са дължина $[L]$, време $[T]$ и маса $[M]$ (Maxwell, 1873). Впоследствие Международната система SI - International System of Units приема съответно m - метър, kg - килограм и s - секунда за основни мерни единици. България въвежда мерните единици приети в SI със „Закон за измерванията", който е в сила от 09.11.2002 г. В същия закон са дадени следните определения:

- "Величина" е свойство на явление, тяло или вещество, което може да бъде различено качествено и определено количествено.

Величини са например маса, налягане, работа, електричен заряд, дължина, обем.

- "Единица за измерване" е конкретна величина, определена и приета със спогодба, с която се сравняват други величини от същия вид, за да се изразят техните големини по отношение на тази величина

Зависимостта на единицата за измерване на дадена величина от основните мерни единици в избрана система се нарича размерност. Така, размерността на величината маса е килограм, площта има размерност квадратен метър, скоростта - метър за секунда.

- "Еталон" е мярка, измервателен уред, сравнителен материал или измервателна система, предназначени за определяне, възпроизвеждане, реализация или съхраняване на единица на една или повече стойности на величина, която служи като изходна.

Например, ако е необходимо да сравняват големини на дължини в системата SI, то те ще бъдат съотнесени с дължината на еталона от един метър. Така, ако l е числено значение за измерена големина на дължина, то тя ще бъде изразена като l[m], например 4[m]. Същото се отнася и за 5[s] или 2[kg].

Удобно е видовете величини да се записват в обобщен вид, както е предложил Максуел. Така $[L]$ може да бъда всяка мерна единица за дължина (метър, инч, фут, миля, светлинна година и др.), а $[T]$ всяка мерна единица за време (секунда, час, година, век и др.)

В литературата се среща записване на мерните единици в кръгли скоби - 2(kg) или записване без разграничаване от численото значение - 2 kg. Често символните обозначенията на величините и единиците за измерване съвпадат. Например m се използва като символно обозначение на величината маса и едновременно за обозначаване на мерната единица за дължина - метър. По-нататък с цел разграничаване и избягване на двусмислие, размерностите ще бъдат записване в квадратни скоби.

3. Размерност на величина

Размерността на дадена величина може да бъде определен от нейният формален математически запис, с който се посочва връзката между величините. Например скоростта v и нейната размерност могат да бъдат определени като:

$$v = \frac{s}{t}, \left[\frac{L}{T}\right] = [LT^{-1}]$$

където s и t обозначават величини за дължина и време.

В различни конкретни случаи размерността на скоростта може да бъде:

$$\frac{[m]}{[s]}, \left[\frac{km}{h}\right], \left[\frac{ft}{s}\right]$$

където m – метър, s - секунда, h - час, ft - фут

Размерността се чете като „метър в секунда“, „метър за секунда“ или „един метър за една секунда“, „километър в час“, „фут за секунда“, като съдържателно означава изминатото разстояние за определено време. Например:

$$v = \frac{20[m]}{4[s]} \rightarrow \ v = 5\left[\frac{m}{s}\right]$$

Може да се каже - изминати са 20 метра за 4 секунди, 5 метра за една секунда или 5 метра в секунда, т.е. за една секунда са изминати 5 метра. В някои случай е удобно да се използва реципрочното значение на скоростта, например:

$$\frac{1}{v} = \frac{4[s]}{20[m]} \rightarrow \frac{1}{v} = 0.2, \left[\frac{s}{m}\right]$$

Може да се каже – за 4 секунди са изминати 20 метра или за две десети от секундата е изминат един метър.

4. Математически действия с размерности

Правило 1: Математическите действия с размерности са събиране, изваждане, умножение, деление и повдигане на степен.

Математическите действия се извършват аналогично на действията с числа. Също така са в сила и общоприетите свойствата на съответното действие, като разместително, съдружително, разпределително, умножение на нула и едно.

Правило 2: Събиране и изваждане се извършва само на величини, които имат еднакви размерности

Пример 1: Сумарната скорост v на два автомобила, които се движат насрещно със скорости съответно $v_1 = 20\left[\frac{m}{s}\right]$ и $v_2 = 10\left[\frac{m}{s}\right]$ е:

$$v = v_1 + v_2 = 20\left[\frac{m}{s}\right] + 10\left[\frac{m}{s}\right] = 30\left[\frac{m}{s}\right]$$

Пример 2: Нека в Пример 1 скоростта на първия автомобил да е зададена като $v_1 = 20\left[\frac{km}{h}\right]$, то тогава скоростта не може да бъде определена, тъй като се събират величини с различни размерности и е нарушено Правило 2:

$$v = v_1 + v_2 = 20\left[\frac{km}{h}\right] + 10\left[\frac{m}{s}\right]$$

Правило 3: Преобразуване на размерността на дадена величина в кратна размерност се извършва с умножение или деление

Пример 3: Колко метра за секунда е $72\left[\frac{\boldsymbol{km}}{\boldsymbol{h}}\right]$?

От условието се вижда, че е необходимо да се преобразуват дължина от километър в метри и време от час в секунди. Количеството на метрите в един километър могат да се запишат като $1000\left[\frac{m}{km}\right]$, а количеството на секундите в един час като $3600\left[\frac{s}{h}\right]$. Според Правило 3, трите размерности трябва да са умножават или делят по такъв начин, че в крайна сметка да получим $\left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}\right]$. Ако извършим аритметични действия само с размерности и без количества се вижда, че:

$$\left[\frac{m}{s}\right] = \left[\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\right].\frac{\left[\frac{m}{\cancel{km}}\right]}{\left[\frac{s}{\cancel{h}}\right]}$$

След добавяне на съответните количества се получава:

$$20\left[\frac{m}{s}\right] = 72\left[\frac{km}{h}\right].\frac{1000\left[\frac{m}{km}\right]}{3600\left[\frac{s}{h}\right]}$$

Понякога не е очевидно какви действия трябва да се извършат с величините, за да бъдат преобразувани в необходимата размерност.

Пример 4: Нека в същата задача от Пример 3 да се търси за колко секунди е изминат един метър $\left[\frac{s}{m}\right]$, освен това преобразуването на дължината да е изразено като $0{,}001\left[\frac{km}{m}\right]$. За да се определят неизвестните степенни показатели е възможно да се състави следното уравнение с размерности:

$$\left[\frac{s}{m}\right]^1 = \left[\frac{km}{h}\right]^x \left[\frac{km}{m}\right]^y \left[\frac{s}{h}\right]^z$$

$$[s^1 m^{-1}] = [km^x h^{-x}][km^y m^{-y}][s^z h^{-z}]$$

Като следствие от равенството на степенните показатели на отделните мерни единици може да се състави система от линейни уравнения: от m: $-1 = -y$; от s: $1 = z$; от km: $0 = x + y$; от h: $0 = -x - z$, откъдето следва, че $x = -1; y = 1;\ z = 1$:

$$0{,}05\left[\frac{s}{m}\right] = \frac{0{,}001\left[\frac{km}{m}\right]3600\left[\frac{s}{h}\right]}{72\left[\frac{km}{h}\right]}$$

Правило 4: Безразмерно е отношение на две величини с еднакви размерности.

Отбелязва се с $[1]$, но най-често не се изписва след численото значение на количеството.

Пример 5: Какво е съотношението на скоростите на звука във вода и във въздух?

$$\frac{300\left[\frac{m}{s}\right]}{1500\left[\frac{m}{s}\right]} \approx 0{,}2$$

Правило 5: Ако върху размерност се извършва действие различно от действията в Правило 1, то е необходимо величината от размерна да се преобразува в безразмерна.

Удобството на безразмерните величини е, че те не зависят от мерните единици, от които са били получени, но зависят от това какви величини са съпоставени. Така количествата на две газообразни вещества могат да бъдат съотнесени с техните маси $[kg]$, количества вещество $[mol]$ или обеми $[m^3]$. Например съотношението между газообразните водород H_2 и кислород O_2, които са необходими за получаването на вода, без при това да има остатък от нереагирали газове са съответно:

$$\frac{2}{1}\left[\frac{mol}{mol}\right], \frac{1}{8}\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}}\right], \frac{2}{1}\left[\frac{m^3}{m^3}\right]$$

като обемното съотношение е справедливо само, ако газовете са идеални.

5. Полезни приложения на анализа на размерностите

Чрез анализ на размерностите е възможно да съставим уравнение на зависимост, която предварително не ни е известна, но предполагаме, че величините в уравнението са взаимно зависими. Това е възможно с точност до безразмерен коефициент.

Пример 7: Нека е необходимо да се изследва с каква скорост $v\left[\frac{m}{s}\right]$ ще се движи течност в тръба като се допуска, че течността е несвиваема.

Може да се предположи, че скоростта ще зависи от разликата в наляганията в двата края на тръбата $\Delta p[Pa]$, $[Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right] = \left[\frac{kg.m}{m^2 s^2}\right] = \left[\frac{kg}{m.s^2}\right]$, освен това вероятно ще зависи от такива свойства на течността като плътност $\rho = \left[\frac{kg}{m^3}\right]$и вискозитет (гъстота) $\nu = \left[\frac{m^2}{s}\right]$. Общият вид на в уравнението ще бъде:

$$v = \ \Delta p^x . \rho^y . \nu^z$$

Уравнението със съответните размерности е:

$$\left[\frac{m}{s}\right]^1 = \left[\frac{kg}{m.s^2}\right]^x \left[\frac{kg}{m^3}\right]^y \left[\frac{m^2}{s}\right]^z$$

$$[m^1 s^{-1}] = [kg^1 m^{-1} s^{-2}]^x [kg^1 m^{-3}]^y [m^2 s^{-1}]^z$$

$$[m^1 s^{-1}] = [kg^x m^{-x} s^{-2x}][kg^y m^{-3y}][m^{2z} s^{-z}]$$

Намирането на неизвестните степенни показатели се извършва, както в Пример 4. Системата от линейни уравнения ще бъде: от m: $1 = -x - 3y + 2z$; от s: $-1 = -2x - z$; от kg: $0 = x + y$. Решения на системата са $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$; $z = 0$. Фактът, че степента на вискозитета е нула означава, че тази величина не влиза във зависимостта, а нашето предположение е било неправилно, тогава:

$$v = \Delta p^{\frac{1}{2}}.\rho^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$$

Всъщност справката показва, че зависимостта е:

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2}$$

като във формулата влиза и безразмерен коефициент.

Възможно е моделът да бъде усъвършенстван, тъй като от физична гледна точка изглежда неправдоподобно вискозитетът да не влияе на скоростта. Прецизирането на математическия модел може да бъде продължено като се остави вискозитетът и се добавят нови величини. Това могат да бъдат например напречното сечение и дължината на тръбата, от които евентуално зависи скоростта на течността. След добавяне на новите величини, процесът на определяне на неизвестните степенни показатели може да бъде повторен и да бъде намерена нова зависимост, ако такава съществува.

Методът е удобен за намиране на неизвестна размерност на дадена величина.

Пример 8: Да се определи мощността на топлинния поток $P[W]$, който преминава напречно през тухлена стена с дебелина $d = 0,4[m]$, повърхнина $S = 1[m^2]$ и температурна разлика от двата края на стената $\Delta T = 20[K]$.

Мощността на топлинния поток може да бъде намерен от зависимостта:

$$P = \frac{\lambda.S.\Delta T}{d}$$

където λ е коефициент на топлопроводност. Неговата размерност и големина не са посочени в условието на задачата.

Определянето на размерността на λ става след като λ бъде изразен, а величините са заместени с техните размерности.

$$\lambda = \frac{P.d}{S.\Delta T}, \frac{[W][m]}{[m^2][K]} = \frac{[W]}{[m.K]}$$

Данните от справочник показват, че за тухла $\lambda = 0{,}44\left[\frac{W}{m.K}\right]$, окончателно:

$$P = \frac{0{,}44\left[\frac{W}{m.K}\right].1[m^2].20[K]}{0{,}4[m]} = 22[W]$$

6. Заключение

Правилният анализ на размерностите е необходимо условие за:

- Успешното прилагане на математическите модели на практика
- Получаване на измерим веществен резултат
- Избягване на правописни и алгебрични грешки
- Запомняне и извеждане на формули на математически модели
- Определяне на величини с неизвестни размерности
- Съставяне на нови математически модели

Задълбоченото изучаване на математическата взаимовръзка на величините и анализът на техните размерности са предпоставка за успешно практическо прилагане на математическите модели.

Навиците за измерване на разнообразни физични величини следва да се формират в началните образователни етапи. Впоследствие с натрупване на достатъчно математически умения е необходимо да се въвеждат понятията и правилата за работа с размерности, като е желателно те да се демонстрират върху конкретни приложни примери. Практическата дейност на учениците по извършване на прецизни измервания в условията на подходяща експериментална обстановка в крайна сметка разнообразяват и затвърждават техните математически умения. Допълнителните занятия в STEM среда са от голямо значение, тъй като там учениците могат сами да планират и извършват научни експерименти.

ЛИТЕРАТУРА

МОН, 2021. Стратегическа рамка за развитие на образованито, обучението и ученето в Република България (2021-2023) , с.21.

BLOOM, B.S., at al, 1956. Taxonomy of educational objectives, p.120

ЗВОНАРЕВ, С. 2019. "Основы математичекого моделирования", Учебное пособие, ISBN 978-5-7996-2576-4, с.11.

MAXWELL, J.C. 1873. A treatise on electricity and magnetism, p.4

LANGHAAR H.L. 1951, Dimensional Analysis and Theory of Models, Vol. 2

REFERENCES

MES, 2021. Strategic framework for the development of education, training and learning in the Republic of Bulgaria (2021-2023) , c.21.

BLOOM, B.S., at al, 1956. Taxonomy of educational objectives, p.120

ZVONAREV, C. 2019. " Fundamentals of Mathematical Modeling", Study guide, ISBN 978-5-7996-2576-4, c.11.

MAXWELL, J.C. 1873. A treatise on electricity and magnetism, p.4

LANGHAAR H.L. 1951, Dimensional Analysis and Theory of Models, Vol. 2

DIMENSIONAL ANALYSIS - A NECESSARY CONDITION FOR THE APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELS

Abstract. The article presents the analysis of dimensions as a necessary condition for the correct application of mathematical models in practice. Basic mathematical operations with dimensions are presented, as well as rules for working with dimensions. Each rule is explained with an example. The material is appropriate both for secondary school and for specific subjects in professional education.

Keywords: Units of measurement, dimensional analysis, STEM, mathematical model

Dr. Georgi Stamov Gachev, Assist. Prof.

ORCID iD: 0000-0002-7297-0888

Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences

Acad. Georgi Bonchev Str., Block 8

1113 Sofia, Bulgaria

e-mail: gachev@math.bas.bg